暇になっちゃった人へ

- 4 日目の内容へ進む
- 4 日目も終わっちゃったら?
  - 4 日目の内容は「電話」にするのに必須ではないものが多いが, 色々発展の余地がある話題なので, 各自色々な実験をやってみるとよい (考察ネタにもなるし)
  - 効率的な符号化を極める
  - 音の変換 (ピッチ変換やら速度の変換やら) で遊ぶ
  - audacity で遊ぶ
- 最終的な電話のオプション機能についてチームで議論する
- 早く終わったらもっとやる

4 日目の内容

- 標本化周波数について
- 離散フーリエ変換 (DFT; = 周波数への分解) について

標本化周波数

大雑把には,

標本化周波数大 $\Longleftrightarrow$ 正確・高音質

一方,

標本化周波数大 $\Longleftrightarrow$ 符号化の効率悪い (データサイズ大)

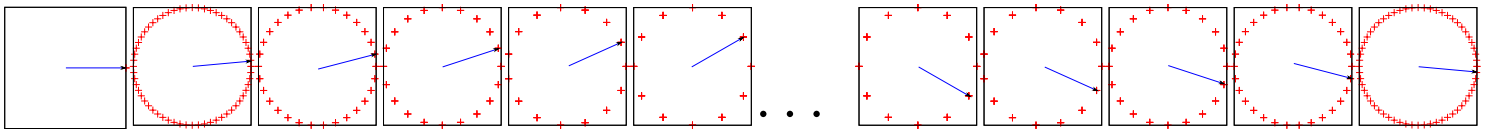
なので,「適切な標本化周波数」を理解したい.
もう少しマシな直感は,

元々の波に高周波が含まれている
$\Rightarrow$ 標本化周波数を大きくする必要あり

でも, どのくらい?

標本化 (sampling) 定理

- 周波数 f の波は, 周波数 $2f$ 以上の標本化周波数が必要.
- 直感的な理解: まばたき一回の間に半周以上されると, 見失う (逆回りに見えるとか, 1 周以上しているのに気づかないとか)
- 課題 4.1-4.3 などで感じてください. 2 日目のデータ可視化や, ドレミ... が役に立ちます



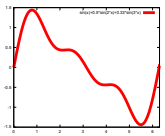
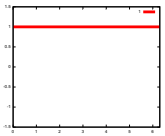
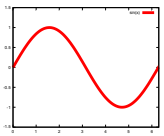
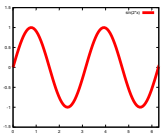
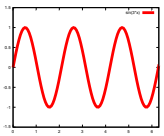
フーリエ級数展開，離散フーリエ変換

- フーリエ級数展開は, $[0, T]$ で定義された関数 (信号) を,

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{定数} \\
+ & T \text{ を周期とする正弦波} \\
+ & T/2 \text{ を周期とする正弦波} \\
+ & T/3 \text{ を周期とする正弦波} \\
+ & \cdots
\end{array}
$$

  と展開する方法.
- 離散フーリエ変換は, それをやるのに, $[0, T]$ でとった関数の「サンプル」を用いて行う方法

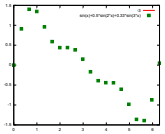
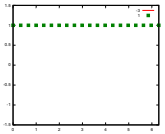
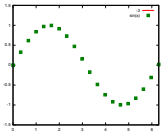
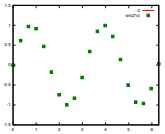
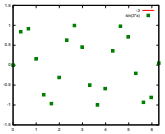
フーリエ級数展開


$= a_0$

$+a_1$

$+a_2$

$+a_3$

$+\cdots$

与えられた関数 (波, 信号,) を「基本波」の線型結合に分解

離散フーリエ変換

- 同じことを等間隔に取り出した「標本点」を用いて行う

 $= a_0$  $+a_1$  $+a_2$  $+a_3$  $+\cdots$

式で書けば:

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} w_{0,0} \\ w_{1,0} \\ \vdots \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} w_{0,1} \\ w_{1,1} \\ \vdots \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} w_{0,2} \\ w_{1,2} \\ \vdots \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} w_{0,3} \\ w_{1,3} \\ \vdots \end{pmatrix} +$$

行列に直せば

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \cdots & w_{0,N-1} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & \cdots & w_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N-1,0} & w_{N-1,1} & \cdots & w_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix}$$

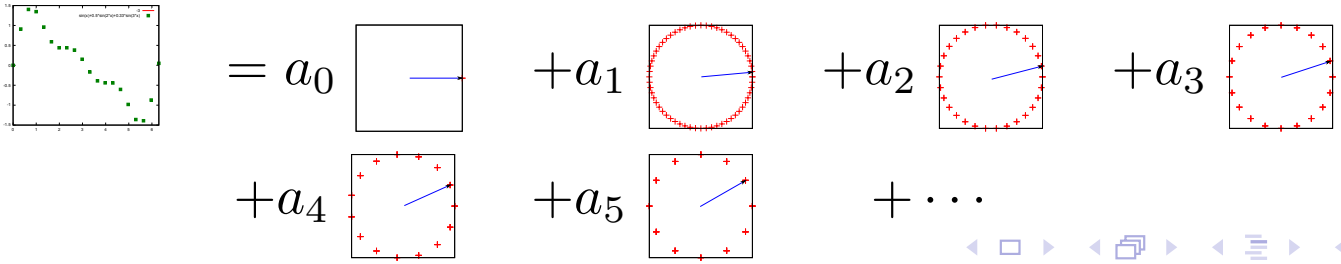
さっきの絵の若干の嘘

- 同じ周波数の基本波は二つ必要 (cos と sin. 「位相」を表現できる必要がある)
- 各周波数で cos, sin のふたつを使ってもよいが, 複素数の指数関数を基本波とすると 1 つですみ，見通しが良い

$$\exp(iX) = \cos\ X + i \sin\ X$$

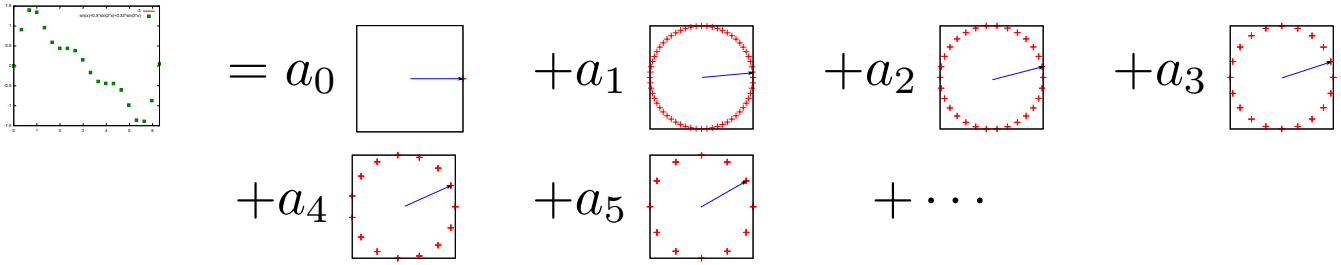
または

$$\begin{aligned} \cos\ X &= \frac{1}{2}(\exp(iX) + \exp(-iX)) \\ \sin\ X &= \frac{1}{2i}(\exp(iX) - \exp(-iX)) \end{aligned}$$



- a_i も今や複素数

再び式で書けば



$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \cdots & w_{0,N-1} \\ w_{1,0} & w_{1,1} & \cdots & w_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N-1,0} & w_{N-1,1} & \cdots & w_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix}$$

ただし，w を 1 の N 乗根 (のうち偏角最小のもの $= e^{\frac{2\pi i}{N}}$) として

$$w_{k,l} = w^{kl}$$

(複素数よありがとう!)

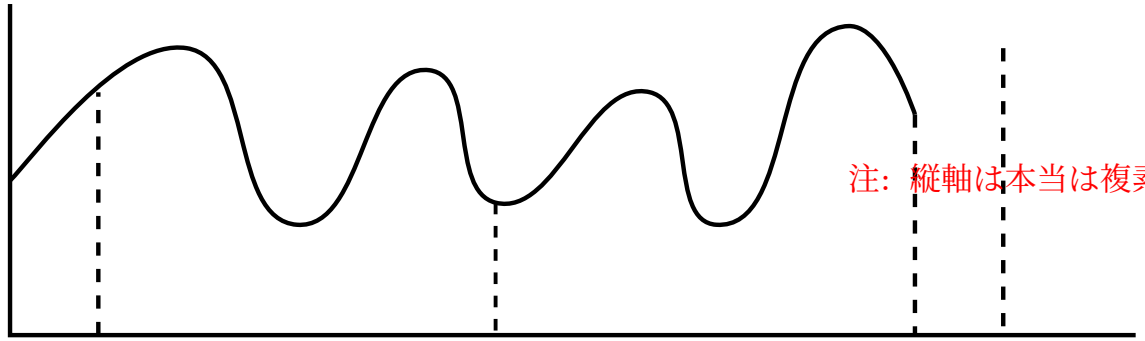
$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{00} & w^{01} & \cdots & w^{0(N-1)} \\ w^{10} & w^{11} & \cdots & w^{1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^{(N-1)0} & w^{(N-1)1} & \cdots & w^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix}$$

の解 (逆行列) も超簡単:

$$W^{-1} = \frac{1}{N}{}^{*}W \equiv \frac{1}{N}{}^{t}\bar{W}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} w^{-00} & w^{-10} & \cdots & w^{-(N-1)0} \\ w^{-01} & w^{-11} & \cdots & w^{-(N-1)1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^{-0(N-1)} & w^{-1(N-1)} & \cdots & w^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

DFT の結果と「周波数」の対応付け



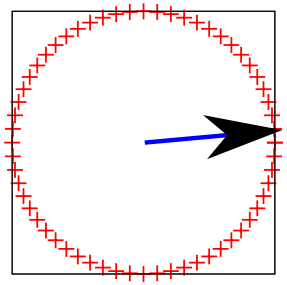
$0 \quad 1 \quad \cdots \quad N/2 \quad \cdots \quad N-1 \quad N$

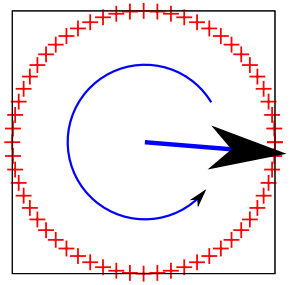
周期 $= T$
周波数 $= 1/T$

周期 $= 2\times$ サンプリング間隔
周波数 $=$ サンプリング周波数 $/2$
$=$ ナイキスト周波数

周期 $=$ サンプリング間隔
$=$ まばたき一回の間に一周
周波数 $=$ サンプリング周波数

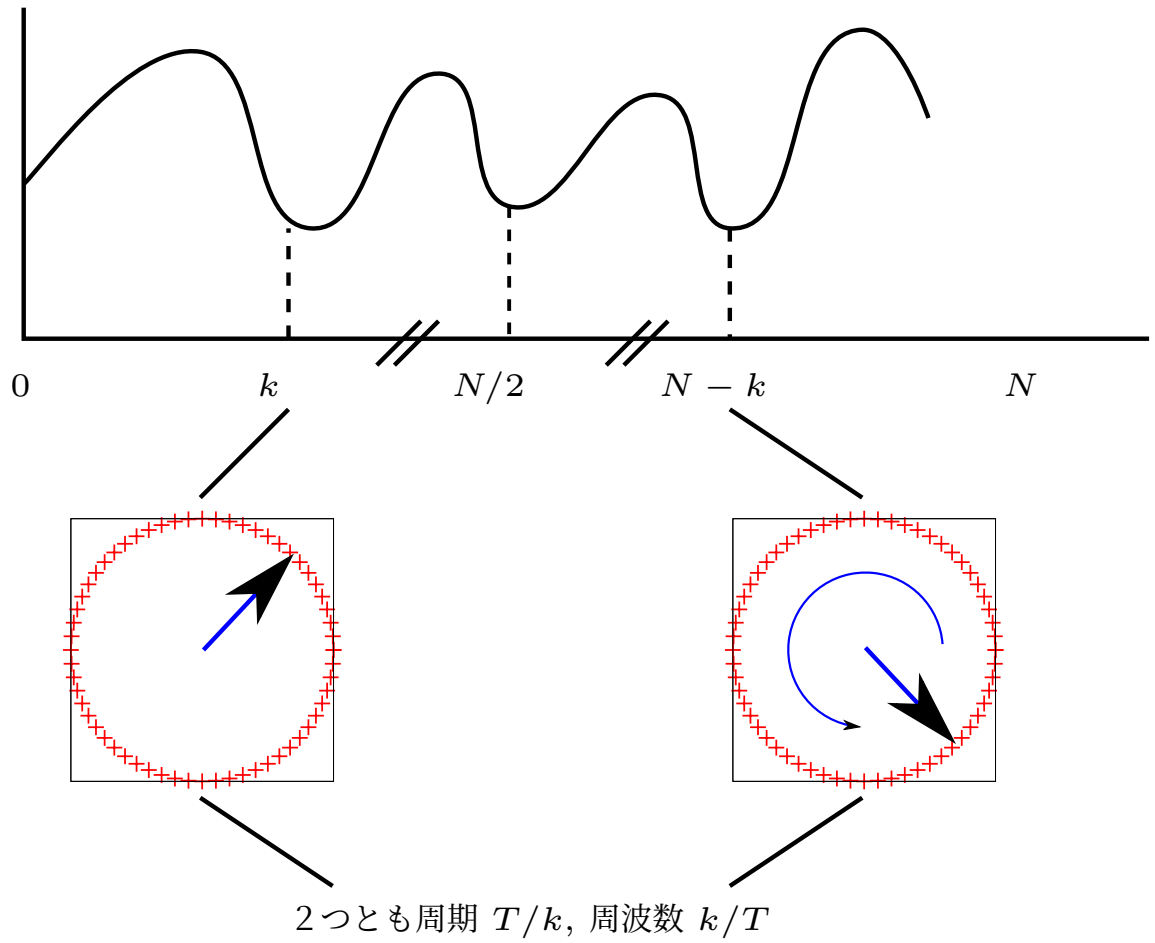
周期 $=$ サンプリング間隔
$=$ まばたき一回の間にほぼ一周 $((N-1)/N$ 周$)$
周波数 $=$ サンプリング周波数





(実は) 2つとも周期 T, 周波数 $1/T$

DFT の結果と「周波数」の対応付け



一般に，a_k と a_{N-k} 両方が，k 倍速 (周波数 k/T) の成分となる．

DFT の結果と「周波数」の対応付け

- 一般に，a_k と a_{N-k} 両方が，k 倍速 (周波数 k/T) の成分となる．
- 実際

$$
\begin{aligned}
a_k w^{kl} &= a_k \left(\cos \frac{kl}{N} + j \sin \frac{kl}{N} \right) \\
a_{N-k} w^{(N-k)l} &= a_{N-k} w^{-kl} \\
&= a_{N-k} \left(\cos \frac{kl}{N} - j \sin \frac{kl}{N} \right)
\end{aligned}
$$

- 元の波が実数の場合，この二つを足すと虚数部分が打ち消し合うはず → a_k と a_{N-k} は必ず複素共役になる
  - 実数部だけを描けば $N/2$ 中心に左右対称
  - 虚数部だけを描けば $N/2$ 中心に点対称